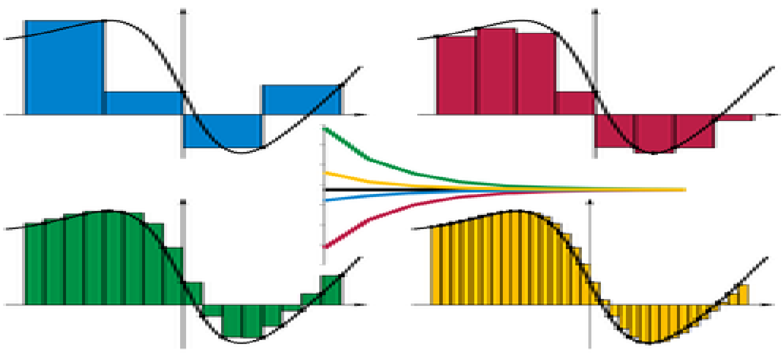
الفصل الدراسي الثالث

العام الدراسي 2016 – 2017 م

الوحدةالسابعه

التكامل

الصف الثاني عشر المتقدم



1) تسمى الدالة F بالدالة الأصلية للدالة f على الفترة I إذا تحقق الشرط $F'(x) = f(x)$

2) على فرض أن F و G هما دالتين أصليتين للدالة f على الفترة I فان $G(x) = F(x) + c$

$$3) \quad \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

حيث c ثابت التكامل الغير محدد و $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$

قواعد أساسية للتكامل الغير محدد

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1} x + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$\int g'(x)e^{g(x)}\,dx = e^{g(x)} + c$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)| + c$$

$$\int f'(x)[f(x)]^n\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$$

السؤال الأول اذا كانت كل من $G(x)\,,\,F(x)$ دالتين أصليتين للدالة $f(x)$ حيث :

$$F(x)=x^2e^{-x} \quad , \quad G(x)=\frac{x^2-2e^x}{e^x}$$

أوجــــد :

1) قيمة الثابت C الذي تختلف به الدالتان $G(x)\,,\,F(x)$

2) أثبت ان الدالة $f(x)=xe^{-x}(2-x)$

السؤال الثاني تحقق من صحة المساواة الآتيـــة

$$\int \left(e^x \ln(x^2+1)+\frac{2xe^x}{x^2+1}\right)\,dx=e^x\ln(x^2+1)+c$$

السؤال الثالث أوجد الدالة الأصلية لكل مما يأتي (أوجد التكاملات الآتية) :-

1) $\int (3x^2+2e^x-4)\ dx$

2) $\int \left(x\sqrt{x}+\frac{4}{x^3}\right)\ dx$

3) $\int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{3}{x}\right)\ dx$

4) $\int \left(3x^2-\frac{2}{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+3e^2\right) dx$

السؤال الرابع أوجد الدالة الأصلية لكل مما يأتي (أوجد التكاملات الآتية) :-

1) $\int \frac{4}{x}\sqrt[3]{x^3+x^4}\,dx$

2) $\int \frac{\tan^5 x}{\cos^2 x}\,dx$

3) $\int \frac{4x}{x^2+3}\,dx$

4) $\int \frac{2}{x^2+1}\,dx$

5) $\int \csc^2 x e^{\cot x}\,dx$

6) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

7) $\int \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}\,dx$

8) $\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx$

السؤال الخامس أوجد الدالة الأصلية لكل مما يأتي (أوجد التكاملات الآتية) :-

1) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$

2) $\int \left(\frac{4-\sin x}{\cos^2 x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\right) dx$

السؤال السادس أوجد معادلة الدالة $y = f(x)$ حيث $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x+4$ وميل المماس المرسوم لمنحنى الدالة f (x) عند (1 , -1) يساوي 2 .

السؤال السابع حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع هي $a(t)=t^2+1$ و السرعه المتجهه الأبتدائية $v(0)=4$ و الموقع الأبتدائي هو $S(0)=0$

السؤال الثامن حوض من المياه فيه الآن 100 سمكة , فاذا كان معدل تزايد عدد الاسماك يعطى بالعلاقة

$$\frac{dy}{dt}=200e^{2t}$$

حيث (y عدد الأسماك , t بالسنوات) . فأوجد عدد الاسماك بعد أربع سنوات .

السؤال التاسع لتكـن $x\neq 0$, $y=\frac{\ln x}{x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ ثم بألاعتماد على ما توصلت اليه أوجد $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

اذا كان n عددا صحيح موجبا و c ثابت فان:

1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

2) $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

لأى عددين ثابتين c , d

$$\sum_{i=1}^{n}(ca_i + db_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i + d\sum_{i=1}^{n} b_i$$

السؤال الأول أكتب كل الحدود و أحسب المجموع

1) $\sum_{i=1}^{5}(i^2+2i+1)$

2) $\sum_{i=6}^{10}(4i+2)$

السؤال الثاني استخدم قواعد المجموع لحساب مجموع كل من

1) $\sum_{i=1}^{40}(i^2-3i+2)$

2) $\sum_{k=0}^{n}(k^2+5)$

السؤال الثالث احسب المجموع بالصيغه $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ لقيم x_i المعطاة .

1) $f(x) = 3x + 5 \quad , x = 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0\ ; \Delta x = 0.4\ ; n = 5$

2) $f(x) = x^2 + 4x \quad , x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\ ; \Delta x = 0.2\ ; n = 5$

السؤال الرابع أحسب المجموع و نهاية كل المجموع عندما $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$

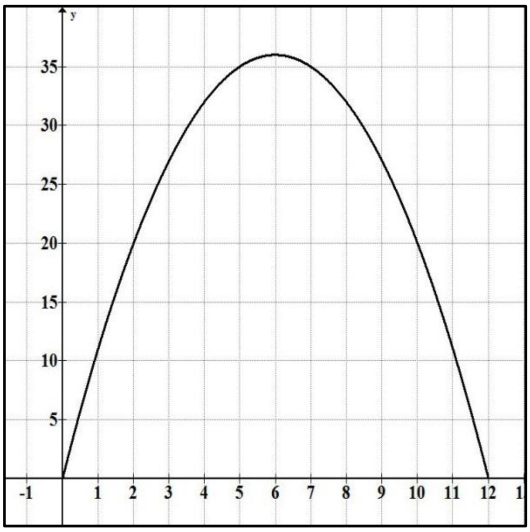
السؤال الخامس استخدم الأستقراء الرياضي لأ ثبات صحة العلاقات الآتية :

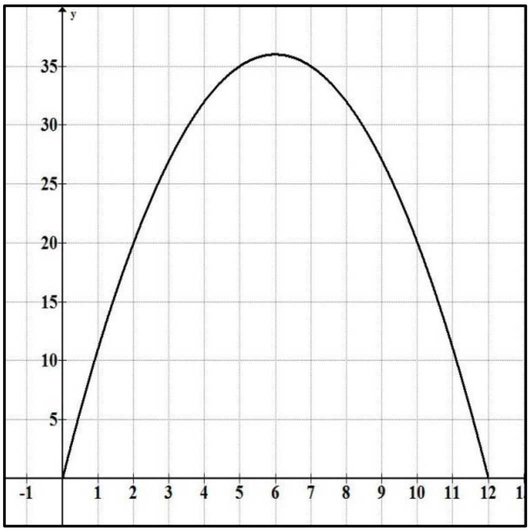
1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

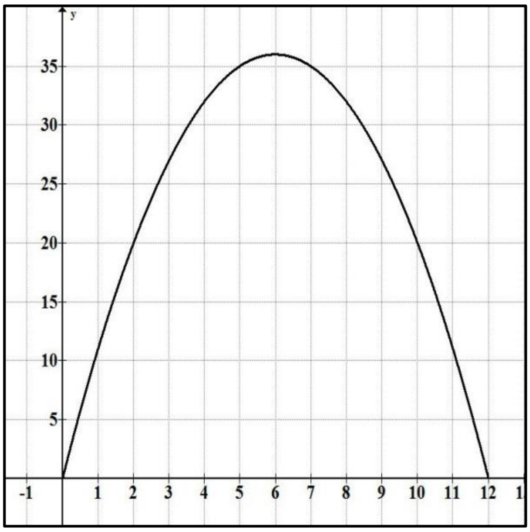
1) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$: *for* all integers n ≥ 1.

السؤال الأول قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)=12x-x^2$ و المحور x على الفترة $[0,12]$

باستعمال 4 , 6 , 12 مستطيلا على الترتيب .استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه







لكل دالة f معرفة على الفترة $[a,b]$. اذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و كان $f(x) \geq 0$ على الفترة $[a,b]$ فان المساحة A تحت المنحنى $y = f(x)$ على الفترة $[a,b]$ يمكن حسابها من الصيغة الآتية

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

السؤال الثاني أوجد المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = x + 3$ على الفترة $[0,2]$ باستخدام النهاية و مجموع ريمان

السؤال الثالث أوجد المساحة تحت المنحنى $y = f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0,4]$ باستخدام النهاية و مجموع ريمان

السؤال الرابع لتكن الدالة $y = 2x - x^2$ استخدم طريقة التقريب بالمستطيلات المنتصفي لايجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة و محور السينات و المستقيمين $x = 0$, $x = 2$ و ذلك بتقسيم الفترة $[0, 2]$ الى 8 فترات جزئية متساوية في الطول

السؤال الخامس قرب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلا و قواعد القيم

1) نقطة النهاية اليسرى 2) نقطة النهاية اليمنى 3) نقطة المنتصف

$y = \sqrt{x+2} \quad on\,[1,4] \quad , n = 8$

يُعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x في الفترة $[a, b]$ بالصيغة

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \,,\, \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

لاي دالة f معرفة على الفترة $[a,b]$. يكون التكامل المحدود لـ f من a الى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

ان وجدت النهاية فان الدالة f تكون قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$

السؤال الأول أوجد قيمة التكامل $\int_1^3 x^2\,dx$ بحساب نهاية مجموع ريمان

القيمة المتوسطة للدالة $y=f(x)$ على الفترة $[a,b]$ يمكن حسابها من $f_{ave}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

اذا كانت الدالة f متصلة على $[a,b]$ فانة يوجد عدد $c\in(a,b)$ يحقق $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

السؤال الثاني أحسب القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة $f(x)=2x+1 \quad ,[0,4]$

السؤال الثالث أوجد قيمة c التي تتحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل $\int_{0}^{2} 3x^2 dx$

النظرية الأساسية لحساب التفاضل و التكامل (الجزء الأول)

اذا كانت f **دالة متصلة على** $[a,b]$ **,** $F(x)$ **هي دالة أصلية لـ** $f(x)$ **فان**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

السؤال الأول أوجد قيمة التكاملات الآتية باستخدام النظرية الأساسية لحساب التفاضل و التكامل

1) $\int_0^3 (3x^2 - 2)dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x - \sqrt{3}\sin)dx$

3) $\int_1^e (3 - \frac{2}{x})dx$

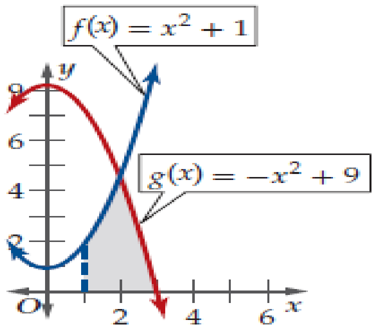
4) $\int_{-1}^1 \frac{4}{1+x^2}dx$

5) $\int_0^2 (\sin^2 x + \cos^2 x)dx$

6) $\int_1^4 \frac{x-3}{\sqrt{x}}dx$

السؤال الثاني احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $g(x), f(x)$

و المحور x في الفترة $1 \le x \le 3$



السؤال الثالث احسب القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة

2) $f(x) = 2x - 2x^2 \quad ,[0,1]$

1) $f(x) = \cos x \quad ,[0, \frac{\pi}{2}]$

السؤال الرابع أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2 - \sqrt{9 - x^2}$ على الفترة $[-3, 3]$ ثم أوجد قيم C

التي تقع في هذه الفترة والتي يكون عندها $f_{ave} = f(c)$

النظرية الأساسية لحساب التفاضل و التكامل (الجزء الثاني)

اذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ فان $F'(x)=f(x)$ على $[a,b]$

السؤال الأول أوجد $f'(x)$ لكل مما يأتـــــــــــــــي :-

1) $f(x)=\int_{-2}^{x}\sqrt{3t^4-1}dt$

2) $f(x)=\int_{1}^{\sqrt{x}}(t^2+1)dt$

3) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}dt$

السؤال الثاني اذا كانت $y=x^3-\int_x^1 \frac{1}{t}dt+\sqrt{2}$ أثبت أن $xy'=3x^3+1$

السؤال الثالث أوجد معادلة المماس عند النقطة المعطاة لـ x اذ كان $x=-1$, $y=\int_{-1}^{x}\sqrt{t^2+2t+2}dt$

$$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$$

السؤال الأول باستخدام التعويض المناسب أوجد التكاملات الاتية :-

1) $\int \frac{\csc^2(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

2) $\int \frac{t^2}{(1+2t^3)^4} dt$

3) $\int \cos(2x)\sin^3(2x)dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\sec^2 x dx$

السؤال الثاني أوجد التكاملات الآتية :-

1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$

2) $\int \frac{(\sin^{-1}x)^6}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

3) $\int \frac{1}{x^2}\cot(\frac{1}{x})dx$

4) $\int e^{-x}(3+e^{-x})^5\,dx$

5) $\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx$

6) $\int \frac{1}{x(3+\ln x)^4}\,dx$